Extremwertaufgaben
zu quadratischen Funktionen

Die Grundlagen dazu findet man im Text 18023

Datei Nr. 18035

Stand: 14. August 2010

Friedrich Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Inhalt

Vorwort

Hier findet man Extremwertaufgaben, die man schon in der Klasse 9/10 behandeln kann, denn sie führen auf quadratische Funktionen, deren Extremwert (Parabelscheitel) man mit quadratischer Ergänzung bestimmen kann.

Aufgaben, die man (in der gymnasialen Oberstufe) mit Ableitungsfunktionen löst, werden in den Texten 49010 und 49011 behandelt.

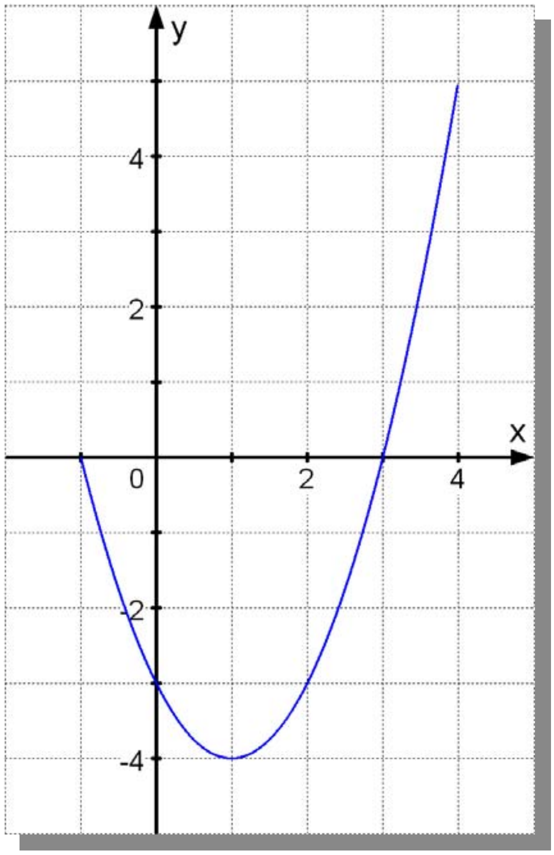
1 Theorie

In Anwendungsaufgaben werden sehr oft quadratische Funktionen untersucht, die einen eingeschränkten Definitionsbereich besitzen. Eine mögliche Fragestellung ist dann: Für welche Werte von x liefert diese Funktion Extremwerte, also Maximum oder Minimum. Bevor wir dies in Anwendungsaufgaben ansehen, untersuchen wir einige Funktionen direkt auf diese Fragestellung hin.

Beispiel 1

Untersuche die Funktion f mit $f(x) = x^2 - 2x - 3$ und $-1 \le x \le 4$ auf Extremwerte.

Achtung: Das Schaubild darf jetzt nur der Anschauung dienen, nicht der Argumentation!



1. Schritt: Da der Koeffizient von x^2 positiv ist, ist die <u>Parabel nach oben geöffnet</u>. Daher ist der Scheitel der absolute Tiefpunkt!

2. Schritt: <u>Berechnung des Scheitels durch quadratische Ergänzung</u>:

$$y = x^2 - 2x - 3$$
$$y = \left(x^2 - 2x + \ ? \ \right) - 3$$

Ziel ist die Ergänzung des Quadrats in der Klammer zu $(x-1)^2 = x^2 - 2x\boxed{+1}$. Dieses Quadrat wird zum Ausgleich am Ende wieder subtrahiert:

$$y = \underbrace{\left(x^2 - 2x + \boxed{+1}\right)}_{(x-1)^2} \underbrace{-3\boxed{-1}}_{-4} \quad \text{also} \quad y = (x-1)^2 - 4$$

Erg: Der Parabelscheitel ist $S(1\,|\,-4)$.

Funktionsinterpretation: f hat für x = 1 ihr <u>**absolutes Minimum**</u>: $f(1) = y_{min} = -4$.

3. Schritt: <u>**Untersuchung der Randpunkte:**</u>

Der eingeschränkte Definitionsbereich $D = [-1; 4]$ beschert der Kurve **Randpunkte**. Beides sind Hochpunkte, weil die Parabel nach oben geöffnet ist.
$f(-1) = 1 + 2 - 3 = 0 \Rightarrow H_1(-1\,|\,0)$ und $f(4) = 16 - 8 - 3 = 5 \Rightarrow H_2(4\,|\,5)$

Ergebnis:

f hat bei 4 ihr <u>**absolutes Maximum**</u>, nämlich 5. Bei -1 liegt ein relatives Maximum (denn sein Wert ist nur für manche Intervalle maximal, aber nicht für ganz **D)**.